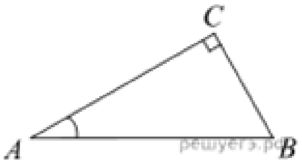
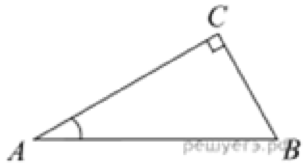
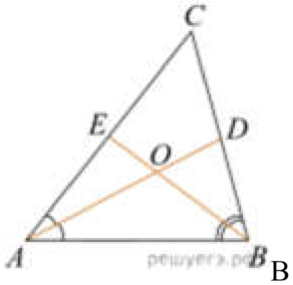
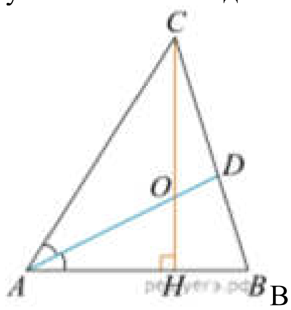
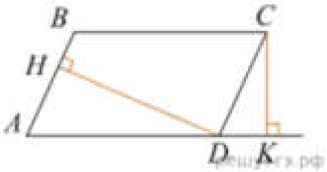
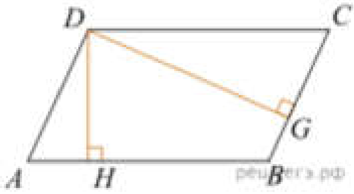
# ТРЕНАЖЁР
# ДЛЯ ПОДГОТОВКИ
# К ЕГЭ-2024.

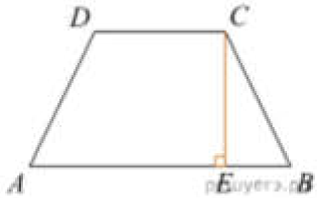
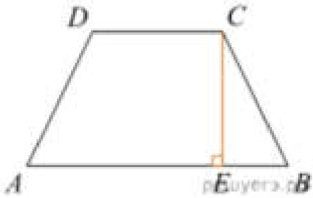
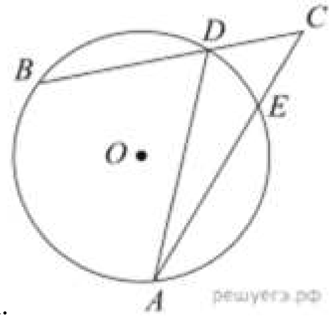
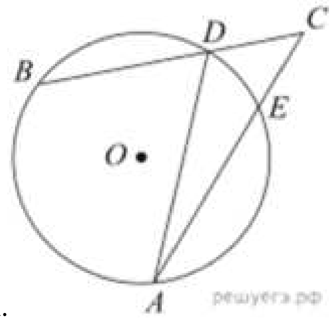
**Составила учитель математики МАОУ СОШ №11 М.Ю.Тория**

**ТРЕНАЖЁР ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ.**

**ТИП №1**

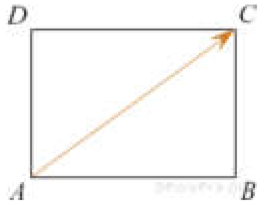
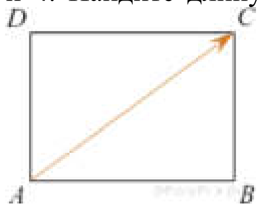
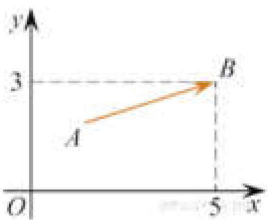
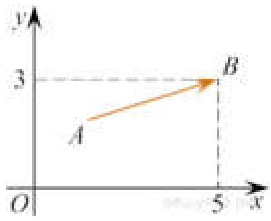
| | |
|---|---|
| **1.1** В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, $AC=4,8,$ $\sin A=\frac{7}{25}.$ Найдите $AB.$<br><br> | **1.2** В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, $AC=2,$ $\sin A=\frac{\sqrt{17}}{17}.$ Найдите *BC*.<br><br> |
| **Решение.** Зная, что $\sin A=\frac{7}{25},$ найдем косинус угла *A*:<br>$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{49}{625}}=\frac{24}{25}.$$<br>Далее имеем:<br>$$AB=\frac{AC}{\cos A}=4,8:\frac{24}{25}=4,8\cdot\frac{25}{24}=\frac{48}{10}\cdot\frac{25}{24}=5.$$<br>Ответ: 5. | **Решение (самостоятельно).** |
| **1.3** В треугольнике *ABC* угол *C* равен 58°, *AD* и *BE* — биссектрисы, пересекающиеся в точке *O*. Найдите угол *AOB*. Ответ дайте в градусах.<br><br> | **1.4** В треугольнике *ABC* *CH* — высота, *AD* — биссектриса, *O* — точка пересечения прямых *CH* и *AD,* угол *BAD* равен 26°. Найдите угол *AOC*. Ответ дайте в градусах.<br><br> |
| **Решение.** Рассмотрим угол *AOB* в треугольнике *AOB*:<br>$$\angle AOB=180^\circ-(\angle OAB+\angle OBA)=180^\circ -$$<br>$$=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle C)=$$<br>$$=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-58^\circ)=180^\circ-61^\circ=11$$<br>Ответ: 119. | **Решение (самостоятельно).** |

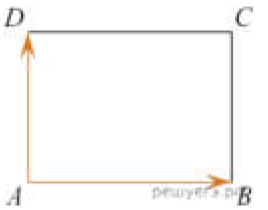
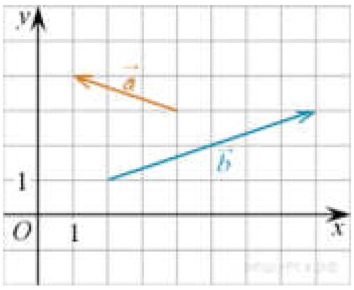
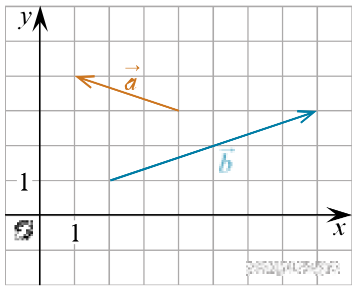
| | |
|---|---|
| **1.5** В параллелограмме $ABCD$ $AB = 3$, $AD = 21$, $\sin A = \frac{6}{7}$. Найдите большую высоту параллелограмма.<br> | **1.6** Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, опущенная на первую сторону, равна 10. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.<br> |
| **Решение.** Большая высота проведена к меньшей стороне. Имеем:<br>$$DH = AD\sin A = 21 \cdot \frac{6}{7} = 3 \cdot 6 = 18.$$<br>Ответ: 18. | **Решение (самостоятельно).** |
| **1.7** Периметр прямоугольника равен 28, а диагональ равна 10. Найдите площадь этого прямоугольника.<br> | **1.8** Периметр прямоугольника равен 34, а площадь равна 60. Найдите диагональ этого прямоугольника.<br> |
| **Решение.** Периметр прямоугольника равен сумме длин его сторон. Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину. Пусть одна из сторон прямоугольника равна $a$, вторая равна $b$. Периметр прямоугольника будет соответственно равен $P = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 28$. Диагональ образует в прямоугольнике два прямоугольных треугольника. По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = 100$. Тогда имеем:<br>$$\begin{cases} a+b=14, \\ a^2+b^2=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=14, \\ (a+b)^2-(a^2+b^2)=196-100 \end{cases} \Leftrightarrow$$<br>$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=14, \\ 2ab=96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=14, \\ ab=48. \end{cases}$$<br>Тем самым, $S = a \cdot b = 48$.<br>Ответ: 48. | **Решение (самостоятельно).** |

<table>
<tr>
<td>1.9 Основания равнобедренной трапеции равны 51 и 65. Боковые стороны равны 25. Найдите синус острого угла трапеции.<br></td>
<td>1.10 Основания равнобедренной трапеции равны 43 и 73. Косинус острого угла трапеции равен $\frac{5}{7}$. Найдите боковую сторону.<br></td>
</tr>
<tr>
<td>Решение. Пусть CE — высота $$EB=\frac{AB-DC}{2}=7.$$ По теореме Пифагора находим: $CE=\sqrt{CB^2-EB^2}=24.$<br>Тогда $$\sin B=\frac{CE}{CB}=\frac{24}{25}=0,96.$$ Ответ: 0,96.</td>
<td>Решение (самостоятельно).</td>
</tr>
<tr>
<td>1.11 Найдите угол ACB, если вписанные углы ADB и DAE опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно $118^\circ$ и $38^\circ$. Ответ дайте в<br><br>градусах.</td>
<td>1.12 Угол ACB равен 42°. Градусная величина дуги AB окружности, не содержащей точек D и E, равна 124°. Найдите угол DAE. Ответ дайте в<br><br>градусах.</td>
</tr>
<tr>
<td>Решение. Угол между двумя секущими равен полуразности высекаемых ими дуг: $$\angle ACB=\frac{\cup AB-\cup DE}{2}=\frac{118^\circ-38^\circ}{2}=40^\circ.$$ Ответ: 40.</td>
<td>Решение (самостоятельно).</td>
</tr>
</table>

**ТРЕНАЖЁР ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ.**

**ТИП №2**

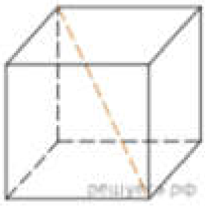
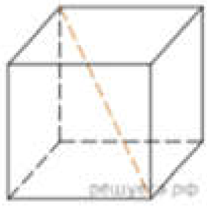
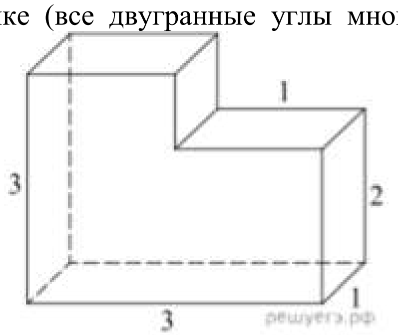
| | |
|---|---|
| **2.1** Две стороны прямоугольника *ABCD* равны 6 и 8. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AC}$.<br> | **2.2** Две стороны прямоугольника *ABCD* равны 3 и 4. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AC}$.<br> |
| **Решение.** Вектор $\overrightarrow{AC}$ является $AC=\sqrt{6^2+8^2}=10.$ диагональю прямоугольника. По теореме<br><br>Пифагора Ответ: 10. | **Решение (самостоятельно).** |
| **2.3** Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке $B(5;\,3)$ имеет координаты (3; 1). Най-<br>дите абсциссу точки $A$.<br> B | **2.4** Вектор с концом в точке B(5; 3) имеет координаты (3; 1). Най-<br>дите ординату точки A.<br> |
| **Решение.** Координаты вектора равны разности координат конца вектора и его начала. Коор- динаты точки *A* вычисляются следующим образом: $5-x = 3, 3-y = 1.$ Откуда $x = 2, y = 2.$<br><br>Ответ: 2. | **Решение (самостоятельно).** |

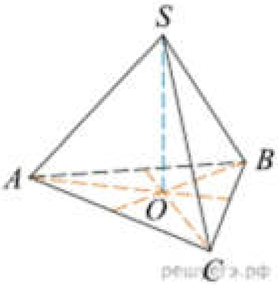
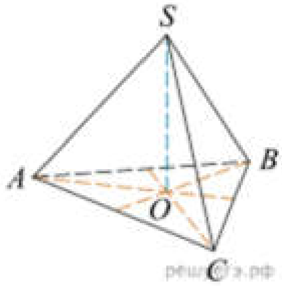
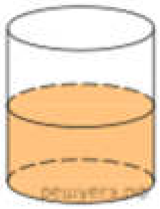
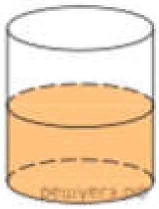
| | |
|---|---|
| **2.5** Найдите длину вектора $\vec{a}(6;8)$. | **2.6 Найдите длину вектора (5; 12).** |
| **Решение.** Длина вектора определяется следующим выражением:<br>$$\sqrt{6^2+8^2}=10.$$<br>Ответ: 10. | **Решение (самостоятельно).** |
| **2.7** Две стороны прямоугольника *ABCD* равны 6 и 8. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.<br> | **2.8** Две стороны прямоугольника *ABCD* равны 6 и 8. Найдите длину суммы векторов CD и CB<br> |
| **Решение.** Сумма векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ равна<br>$$AC=\sqrt{6^2+8^2}=10.$$<br>вектору $\overrightarrow{AC}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ образует в прямоугольнике два прямоугольных треугольника. Поэтому по теореме Пифагора<br>Ответ: 10 | **Решение (самостоятельно).** |
| **2.9**. На координатной плоскости изображены<br><br>векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$. | **2.10** На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и b. Найдите косинус угла между этими векторами.<br> |
| **Решение.** По рисунку определим координаты векторов.Скалярное произведение векторов равно:<br>$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b=-3\cdot 6+1\cdot 2=-16.$$<br>Ответ: −16. | **Решение (самостоятельно).** |
| **2.11** Найдите длину диагонали прямоугольника, вершины которого имеют координаты (2; 1), (2; 4), (6; 1), (6; 4). | **2.12** Найдите длину диагонали прямоугольника, вершины которого имеют координаты (2; 2), (2; 6), (11; 2), (11; 6). |
| **Решение.** Для того, чтобы найти диагональ прямоугольника, найдем длину $a$ и ширину $b$ .По теореме Пифагора: (диагональ *d* является гипотенузой)<br>$$d^2=a^2+b^2=4^2+3^2=16+9=25\Leftrightarrow d=5.$$ | **Решение (самостоятельно).** |

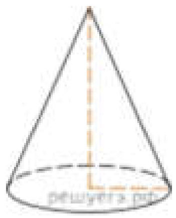
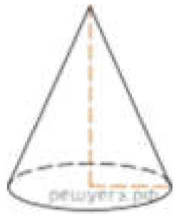
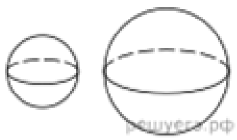
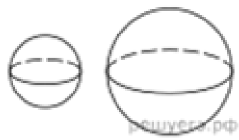
| | |
|---|---|
| Ответ: 5. | |

**ТРЕНАЖЁР ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ.**

**ТИП №3**

| | |
|---|---|
| **3.1** Объем куба равен 8. Найдите площадь его  поверхности. | **3.2** Во сколько раз увеличится объем куба, если  его ребра увеличить в три раза? |
| **Решение.** Зная, что $\sin A = \frac{7}{25}$, найдем косинус угла $A$:<br>**Решение.** Площадь поверхности куба выражается через его ребро $a$ формулой $S = 6a^2$, а объем — формулой $V = a^3$. Поэтому $a^3 = 8$, откуда $a = 2; S = 6 \cdot 2^2 = 24.$<br><br>Ответ: 24. | **Решение (самостоятельно).** |
| **3.3** Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника  прямые). | **3.4** Найдите объем пространственного креста, изображенного на рисунке и составленного из  единичных кубов. |
| **Решение.** объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).<br><br>$$V = 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 = 8.$$<br>Ответ: 8. | **Решение (самостоятельно).** |

| | |
|---|---|
| **3.5** В правильной треугольной пирамиде *SABC* с вершиной *S* биссектрисы треугольника *ABC* пересекаются в точке *O*. Площадь треугольника *ABC* равна 2; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка *OS*.<br><br> | **3.6** В правильной треугольной пирамиде *SABC* медианы основания *ABC* пересекаются в точке $O$. Площадь треугольника *ABC* равна 9; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка $OS$.<br><br> |
| **Решение.** Отрезок *OS* высота треугольной пирамиды *SABC*, ее объем выражается формулой<br>$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot SO.$$<br>Таким образом,<br>$$SO = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3\cdot 6}{2} = 9.$$<br>Ответ: 9. | **Решение (самостоятельно).** |
| **3.7** В цилиндрический сосуд налили 2000 см$^3$ воды. Уровень воды при этом достигает высоты 12 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см$^3$.<br> | **3.8** В цилиндрический сосуд налили 6 куб. см воды. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 1,5 раза. Найдите объём детали. Ответ выразите в<br><br>куб. см. |
| **Решение.** Объём детали равен объёму вытесненной ею жидкости. Объём вытесненной жидкости равен 9/12 исходного объёма:<br>$$V_{\text{дет}} = \frac{9}{12}\cdot 2000 = \frac{3}{4}\cdot 2000 = 1500 \text{ см}^3.$$<br>Ответ: 1500. | **Решение (самостоятельно).** |

<table>
<tr>
<td>3.9 Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?<br></td>
<td>3.10 Во сколько раз увеличится объем конуса, если радиус его основания увеличится в 1,5 раза, а высота останется прежней?<br></td>
</tr>
<tr>
<td>Решение. Объем конуса равен<br>$$V = \frac{1}{3}Sh,$$<br>где $S$ — площадь основания, а $h$ — высота конуса. При уменьшении высоты в 3 раза объем конуса также уменьшится в 3 раза.<br><br>Ответ: 3.</td>
<td>Решение (самостоятельно).</td>
</tr>
<tr>
<td>3.11 Даны два шара. Радиус первого шара в 2 раза больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?<br></td>
<td>3.12 Объем первого шара в 27 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?<br></td>
</tr>
<tr>
<td>Решение.<br><br>Площадь поверхности шара выражается через его радиус формулой $S = 4\pi r^2,$ поэтому при увеличении радиуса вдвое площадь увеличится в $2^2 = 4$ раза.<br><br>Ответ: 4.</td>
<td>Решение (самостоятельно).</td>
</tr>
</table>

**ТРЕНАЖЁР ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ.**

**ТИП №4**

| | |
|---|---|
| **4.1** В среднем из 1400 садовых насосов, поступивших в продажу, 7 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает. | **4.2** Фабрика выпускает сумки. В среднем 8 сумок из 100 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов. |
| **Решение.** В среднем из 1400 садовых насосов, поступивших в продажу, $1400-7=1393$ не подтекают. Значит, вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает, равна $\frac{1393}{1400}=0,995.$ Ответ: 0,995. | **Решение (самостоятельно).** |
| **4.3** За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом. | **4.4** За круглый стол на 5 стульев в случайном порядке рассаживаются 3 мальчика и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки будут сидеть рядом. |
| **Решение.** Пусть первой за стол сядет девочка, рядом с ней есть два места, на каждое из которых может сесть 8 человек, из которых только одна девочка. Таким образом, вероятность, что девочки будут сидеть рядом равна $\frac{2}{8}=0,25.$ Ответ: 0,25 | **Решение (самостоятельно).** |

| | |
|---|---|
| **4.5** В кармане у Миши было четыре конфеты — «Грильяж», «Белочка», «Коровка» и «Ласточка», а также ключи от квартиры. Вынимая ключи, Миша случайно выронил из кармана одну конфету. Найдите вероятность того, что потерялась конфета «Грильяж». | **4.6** На экзамен вынесено 60 вопросов, Андрей не выучил 3 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный вопрос. |
| **Решение.** В кармане было 4 конфеты, а выпала одна конфета. Поэтому вероятность этого события равна одной четвертой.<br><br>Ответ: 0,25. | **Решение (самостоятельно).** |
| **4.7** На борту самолёта 12 кресел расположены рядом с запасными выходами и 18 — за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест. | **4.8** На олимпиаде по русскому языку 250 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 120 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории. |
| **Решение.** В самолете $12 + 18 = 30$ мест удобны пассажиру В., а всего в самолете 300 мест. Поэтому вероятность того, что пассажиру В. достанется удобное место равна $30 : 300 = 0{,}1$.<br><br>Ответ: 0,1. | **Решение (самостоятельно).** |

## ТИП №5

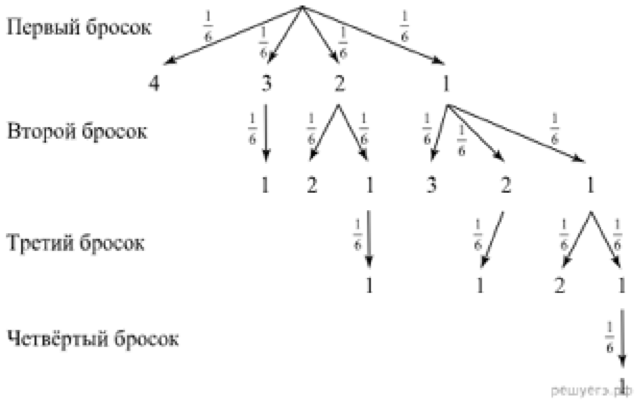
| | |
|---|---|
| **5.1** Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем 36,8 °С, равна 0,81. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется 36,8 °С или выше. | **5.2** При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 66,99 мм или больше чем 67,01 мм. |
| **Решение.** Указанные события противоположны, поэтому искомая вероятность равна $1 - 0,81 = 0,19$.<br><br>Ответ: 0,19 | **Решение (самостоятельно).** |
| **5.3** Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными. | **5.4** В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга). |
| **Решение.** Вероятность того, что батарейка исправна, равна 0,94. Вероятность произведения независимых событий (обе батарейки окажутся исправными) равна произведению вероятностей этих событий: $0,94 \cdot 0,94 = 0,8836$.<br><br>Ответ: 0,8836 | **Решение (самостоятельно).** |

| | |
|---|---|
| **5.5** Агрофирма закупает куриные яйца только в двух домашних хозяйствах. Известно, что 5% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 30% яиц высшей категории. В этой агрофирме 15% яиц высшей категории. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства. | **5.6** Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства. |
| **Решение.** Пусть событие $A$ состоит в том, что яйцо имеет высшую категорию, события $B_1$ и $B_2$ состоят в том, что яйцо произведено в первом и втором хозяйствах соответственно. Тогда события $A\|B_1$ и $A\|B_2$ — события, состоящие в том, что яйцо высшей категории произведено в первом и втором хозяйстве соответственно. По формуле полной вероятности, вероятность того, что будет куплено яйцо высшей категории, равна: $P(AB_1) + P(AB_2) = P(A\|B_1) \cdot P(B_1) + P(A\|B_2) \cdot P(B_2) = 0,05 \cdot P(B_1) + 0,3 \cdot (1 - P(B_1)) = -0,25P(B_1) + 0,3.$<br>По условию эта вероятность равна 0,15, поэтому для вероятности того, что купленное яйцо произведено в первом хозяйстве имеем: $P(B_1) = (0,3 - 0,15) : 0,25 = 0,6.$ Ответ: 0,6. | **Решение (самостоятельно).** |

**5.7** Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 4. Какова вероятность того, что был сделан один бросок? Ответ округлите до сотых.

**5.8** Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 3. Какова вероятность того, что было сделано два броска? Ответ округлите до сотых.

**Решение.** Пусть событие $A$ состоит в том, сумма всех выпавших в результате одного или нескольких бросаний очков равна 4. Построим дерево вариантов, приводящих к этому событию.




Найдем вероятность $P(A)$:

$$P(A)=\frac{1}{6}+\frac{3}{6^2}+\frac{3}{6^3}+\frac{1}{6^4}=\frac{6^3+3\cdot 6^2+3\cdot 6+1}{6^4}=\frac{343}{6^4}.$$

Пусть событие $B$ состоит в том, что был сделан один бросок. Тогда искомая вероятность $P(B|A)$ события $B$ при условии, что событие $A$ наступило (вероятность того, что был сделан один бросок, при условии что выпало 4 очка) определяется по формуле условной вероятности $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}.$ Вероятность произведения событий $B$ и $A$, то есть события, в котором при первом бросании кости выпало 4 очка, равна $\frac{1}{6}.$ Тогда для искомой вероятности получаем:

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{6}:\frac{343}{6^4}=\frac{1}{6}\cdot\frac{6^4}{343}=\frac{216}{343}=0,6297...$$

Округляя до сотых, получаем 0,63.

Ответ: 0,63.

**Решение (самостоятельно).**

**ТРЕНАЖЁР ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ.**

**ТИП №6**

| | |
|---|---|
| **6.1** Решите уравнение $(2x+7)^2=(2x-1)^2.$ | **6.2** Решите уравнение $(x-6)^2=-24x.$ |
| **Решение.** Возведем в квадрат, используя формулы квадрата суммы и квадрата разности: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$:<br>$(2x+7)^2=(2x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^2+28x+49=4x^2-4x+1 \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow 32x=-48 \Leftrightarrow x=-1,5.$<br>Ответ: −1,5. | **Решение (самостоятельно).** |
| **6.3** Найдите корень уравнения $\dfrac{9}{x^2-16}=1.$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней. | **6.4** Решите уравнение $\dfrac{13x}{2x^2-7}=1.$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней. |
| **Решение.** Последовательно получаем:<br>$\dfrac{9}{x^2-16}=1 \Leftrightarrow x^2-16=9 \Leftrightarrow x^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5; \\ x=-5. \end{array}\right.$<br>Больший корень равен 5.<br>Ответ: 5. | **Решение (самостоятельно).** |

| | |
|---|---|
| **6.5** Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{6}{4x-54}}=\dfrac{1}{7}.$ | **6.6** Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{2x+5}{3}}=5.$ |
| **Решение.** Возведем в квадрат:<br>$\sqrt{\dfrac{6}{4x-54}}=\dfrac{1}{7} \Leftrightarrow \dfrac{6}{4x-54}=\dfrac{1}{49} \Leftrightarrow 294=$<br>Ответ: 87. | **Решение (самостоятельно).** |
| **6.7** Найдите корень уравнения $5^{x-7}=\dfrac{1}{125}.$ | **6.8** Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{6-2x}=4.$ |
| **Решение.** Перейдем к одному основанию степени:<br>$5^{x-7}=\dfrac{1}{125} \Leftrightarrow 5^{x-7}=5^{-3} \Leftrightarrow x-7=-3 \Leftrightarrow x=4.$<br>Ответ: 4. | **Решение (самостоятельно).** |

| | |
|---|---|
| **6.9** Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{7}}(7-x)=-2.$ | **6.10** Решите уравнение $\log_x 32=5.$ |
| **Решение.** Последовательно получаем: $\log_{\frac{1}{7}}(7-x)=-2 \Leftrightarrow 7-x=\left(\frac{1}{7}\right)^{-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 7-x=49 \Leftrightarrow x=-42.$<br><br>Ответ: −42. | **Решение (самостоятельно).** |
| **6.11** Найдите корни уравнения: $\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}.$ В ответ запишите наибольший отрицательный корень. | **6.12** Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}=-1.$ В ответе напишите наибольший отрицательный корень. |
| **Решение.** Последовательно получаем: $\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi(x-7)}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$ $\Leftrightarrow x-7=\pm1+6n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8+6n; \\ x=6+6n,\ n\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$<br>Значениям $n\geqslant 0$ соответствуют положительные корни.<br>Если $n=-1$, то $x=2$ и $x=0.$<br>Если $n=-2$, то $x=8-12=-4$ и $x=6-12=-6.$<br>Значениям $n\leqslant -3$ соответствуют меньшие значения корней.<br>Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число $-4$.<br><br>Ответ: −4. | **Решение (самостоятельно).** |

**ТРЕНАЖЁР ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ.**

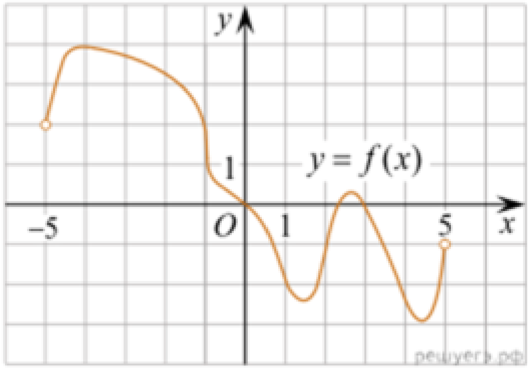
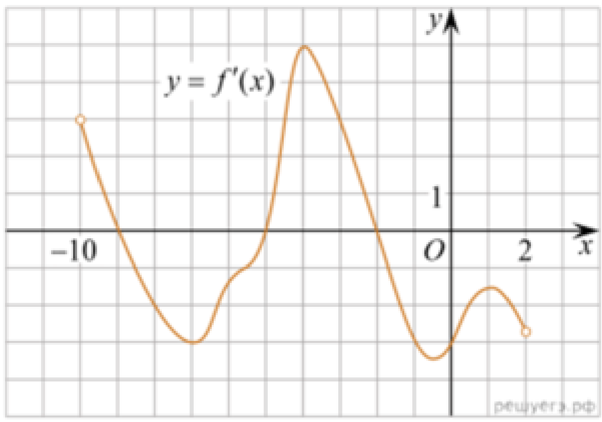
**ТИП №7**

| | |
|---|---|
| **7.1** Найдите значение выражения $\left(\frac{3}{4}+2\frac{3}{8}\right)\cdot 25,6.$ | **7.2** Найдите значение выражения $\left(2\frac{4}{7}-1,2\right)\cdot 5\frac{5}{6}.$ |
| **Решение.** Выполним преобразования: $\left(\frac{3}{4}+2\frac{3}{8}\right)\cdot 25,6=\left(\frac{6}{8}+\frac{19}{8}\right)\cdot 25\frac{3}{5}=\frac{25\cdot 128}{8\cdot 5}=80.$ <br> Ответ: 80. | **Решение (самостоятельно).** |
| **7.3** Найдите значение выражения $\frac{7(m^5)^6+11(m^3)^{10}}{(3m^{15})^2}.$ | **7.4** Найдите значение выражения $((2x^3)^4-(x^2)^6):(3x^{12}).$ |
| **Решение.** Используем свойства степеней: $\frac{7(m^5)^6+11(m^3)^{10}}{(3m^{15})^2}=\frac{7m^{30}+11m^{30}}{3^2\cdot m^{30}}=\frac{18m^{30}}{9m^{30}}=2.$ <br> Ответ: 2. | **Решение (самостоятельно).** |

| | |
|---|---|
| **7.5** Найдите значение выражения $\frac{\log_3 25}{\log_3 5}.$ | **7.6** Найдите значение выражения $\frac{\log_7 13}{\log_{49} 13}.$ |
| **Решение.** Выполним преобразования: $\frac{\log_3 25}{\log_3 5}=\log_5 25=2.$ <br> Ответ: 2. | **Решение (самостоятельно).** |
| **7.7** <br> Найдите $\operatorname{tg}\alpha,$ если $\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$ и $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right).$ | **7.8** <br> Найдите $\operatorname{tg}\alpha,$ если $\sin\alpha=-\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ |
| **Решение.** Поскольку угол $\alpha$ лежит в четвёртой четверти, его тангенс отрицателен. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}=-\sqrt{10-1}=-3.$ <br> Ответ: −3. | **Решение (самостоятельно).** |

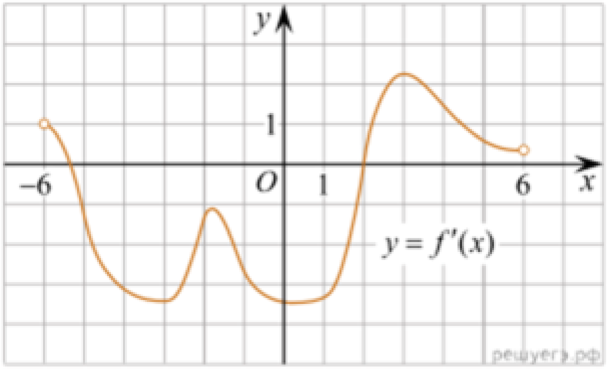
**ТРЕНАЖЁР ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ.**

**ТИП №8**

<table>
<tr>
<td>8.1 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$ (где $x$ — расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.</td>
<td>8.2 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$ (где $x$ — расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t = 6$ с.</td>
</tr>
<tr>
<td>Решение. Найдем закон изменения скорости:<br>$$\upsilon(t) = x'(t) = 12t - 48.$$<br>При $t = 9$ с имеем:<br>$$\upsilon(9) = 12 \cdot 9 - 48 = 60$$ м/с.<br>Ответ: 60.</td>
<td>Решение (самостоятельно).</td>
</tr>
<tr>
<td>8.3 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5;\ 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней.<br><br></td>
<td>8.4 На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.<br><br></td>
</tr>
<tr>
<td>Решение. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны 0. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания. У данной функции производная равна нулю только в точках экстремума функции. На заданном интервале функция имеет 2 максимума и 2 минимума, итого 4 экстремума. Таким образом, касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней в 4 точках.<br><br>Ответ: 4.</td>
<td>Решение (самостоятельно).</td>
</tr>
</table>

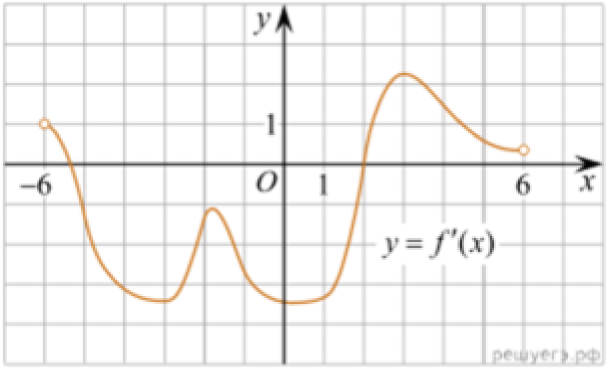
<table>
<tr>
<td>

**8.5** На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.




</td>
<td>

**8.6** На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.




</td>
</tr>
<tr>
<td>

**Решение.** Промежутки возрастания данной функции $f(x)$ соответствуют промежуткам, на которых ее производная неотрицательна, то есть промежуткам $(-6; -5{,}2]$ и $[2; 6)$. Данные промежутки содержат целые точки 2, 3, 4 и 5. Их сумма равна 14.

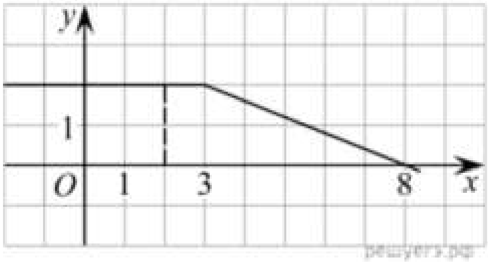
Ответ: 14.

</td>
<td>

**Решение (самостоятельно).**

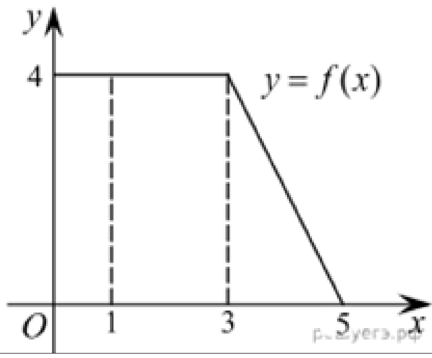
</td>
</tr>
<tr>
<td>

**8.7** На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



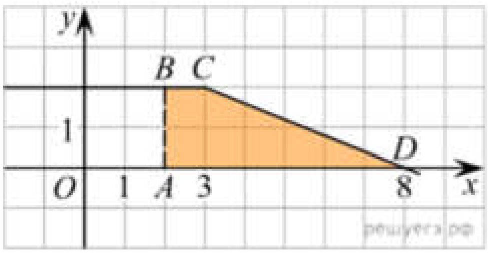

</td>
<td>

**8.8** На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл от 1 до 3.




</td>
</tr>
<tr>
<td>

**Решение.**




Разность значений первообразной в точках 8 и 2 равна площади выделенной на рисунке трапеции $ABCD$. Поэтому

$$F(b) - F(a) = \frac{1+6}{2} \cdot 2 = 7.$$

Ответ: 7.

</td>
<td>

**Решение (самостоятельно).**

</td>
</tr>
</table>

**ТРЕНАЖЁР ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ.**

**ТИП №9**

| | |
|---|---|
| **9.1** При температуре $0\ ^\circ C$ рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5} (^\circ C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, $t^\circ$ — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия. | **9.2** Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p = 500$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $\upsilon = 300$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 700000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - \upsilon) - f$. Определите месячный объем производства $q$ (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 300000 руб. |
| **Решение.** Задача сводится к решению уравнения $l(t^\circ) - l_0 = 3$ мм при заданных значениях длины $l_0 = 10$ м и коэффициента теплового расширения $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ (^\circ C)^{-1}$: $$l(t^\circ) - l_0 = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ) - l_0 = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow l_0 \alpha t^\circ = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow 10 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} t^\circ = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow t^\circ = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 10^{-4}} \Leftrightarrow t^\circ = 25\ ^\circ C.$$ Ответ: 25. | **Решение (самостоятельно).** |
| **9.3** Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние $d_1$ от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние $d_2$ от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах. | **9.4** Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние $d_1$ от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 55 до 70 см, а расстояние $d_2$ от линзы до экрана — в пределах от 260 до 300 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах. |
| **Решение.** Поскольку $f = 30$ имеем: $$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}.$$ Наименьшему возможному $d_1$ значению соответствует наибольшее значение левой части полученного равенства, и, соответственно, наибольшее возможное значение правой части равенства. Разность $\frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}$ в правой части равенства достигает наибольшего значения при наименьшем значении вычитаемого $\frac{1}{d_2}$, которое достигается при наибольшем возможном значении знаменателя $d_2$. Поэтому $d_2 = 180$, откуда $$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{5}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow d_1 = 36$$ см. По условию лампочка должна находиться на расстоянии от 30 до 50 см от линзы. Ответ: 36. | **Решение (самостоятельно).** |

| | |
|---|---|
| **9.5** Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a$ км/ч$^2$. Скорость вычисляется по формуле $\upsilon = \sqrt{2la}$, где $l$ — пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч$^2$ . | **9.6** Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a$ км/ч$^2$. Скорость вычисляется по формуле $\upsilon = \sqrt{2la}$, где $l$ — пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость 110 км/ч. Ответ выразите в км/ч$^2$ . |
| **Решение.** Найдём, при каком ускорении гонщик достигнет требуемой скорости, проехав один километр. Задача сводится к решению уравнения $\sqrt{2la} = 100$ при известном значении длины пути $l = 1$ км: $\sqrt{2la} = 100 \Leftrightarrow \sqrt{2a} = 100 \Leftrightarrow 2a = 10000$ км/ч$^2$.<br>Если его ускорение будет превосходить найденное, то, проехав один километр, гонщик наберёт большую скорость, поэтому наименьшее необходимое ускорение равно 5000 км/ч$^2$.<br><br>Ответ: 5000. | **Решение (самостоятельно).** |
| **9.7** При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 10^5$ Па$\cdot$м$^5$, где $p$ – давление газа в паскалях, $V$ – объем газа в кубических метрах, $k = \frac{5}{3}$. Найдите, какой объём $V$ (в куб. м) будет занимать газ при давлении $p$, равном $3,2 \cdot 10^6$ Па. | **9.8** При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 1,25 \cdot 10^8$ Па $\cdot$ м$^4$, где $p$ — давление газа (в Па), $V$ — объём газа (в м$^3$), $k = \frac{4}{3}$. Найдите, какой объём $V$ (в м3) будет занимать газ при давлении $p$, равном $2 \cdot 10^5$ Па. |
| **Решение.** Поскольку произведение давления на степень объёма постоянно, а давление равно $3,2 \cdot 10^6$ Па, при заданных значениях параметров $k = \frac{5}{3}$ и $\text{const} = 10^5$ Па $\cdot$ м$^5$ имеем равенство:<br>$3,2 \cdot 10^6 V^{\frac{5}{3}} = 10^5 \Leftrightarrow V^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{32} \Leftrightarrow V = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow V = \frac{1}{8}$ м$^3$.<br><br>Ответ: 0,125. | **Решение (самостоятельно).** |

**ТРЕНАЖЁР ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ.**

**ТИП № 10**

| | |
|---|---|
| **10.1** Два велосипедиста одновременно отправились в 240-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 1 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч. | **10.2** Два велосипедиста одновременно отправились в 208-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч. |
| **Решение.**<br>Пусть $v$ км/ч - скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым, тогда скорость второго велосипедиста — $v-1$ км/ч, $v>1$. Первый велосипедист прибыл к финишу на 1 час раньше второго, отсюда имеем:<br>$\frac{240}{v}+1=\frac{240}{v-1}\Leftrightarrow\frac{240+v}{v}=\frac{240}{v-1}\underset{v>1}{\Leftrightarrow}240v+v^2-240-v=240v\Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow v^2-v-240=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=16;\\v=-15\end{array}\right.\underset{v>1}{\Leftrightarrow}v=16.$<br>Значит, первым финишировал велосипедист, двигавшийся со скоростью 16 км/ч.<br>Ответ: 16. | **Решение (самостоятельно).**<br><br>Ответ: |
| **10.3** Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 1 минуту дольше, чем вторая труба? | **10.4** Первая труба пропускает на 10 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 200 литров она заполняет на 10 минут дольше, чем вторая труба? |
| **Решение.**<br>Обозначим $x$ — количество литров воды, пропускаемой первой трубой в минуту, тогда вторая труба пропускает $x+1$ литров воды в минуту. Резервуар объемом 110 литров первая труба заполняет на 1 минуту дольше, чем вторая труба, отсюда имеем:<br>$\frac{110}{x}-\frac{110}{x+1}=1\Leftrightarrow\frac{110}{x^2+x}=1\underset{x>0}{\Leftrightarrow}110=x^2+x\Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow x^2+x-110=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=10;\\x=-11\end{array}\right.\underset{x>0}{\Leftrightarrow}x=10.$<br>Таким образом, первая труба пропускает 10 литров воды в минуту.<br>Ответ: 10. | **Решение (самостоятельно).**<br><br>Ответ: |

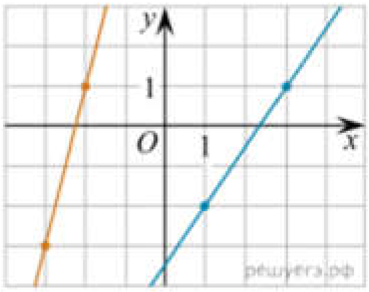
<table>
<tr>
<td>10.5 Игорь и Паша красят забор за 9 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 12 часов, а Володя и Игорь – за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?</td>
<td>10.6 Ирина и Марина вымоют окно за 15 мин. Марина и Наталья вымоют это же окно за 21 мин, а Ирина и Наталья — за 35 мин. За сколько мин девочки вымоют окно, работая втроем?</td>
</tr>
<tr>
<td>Решение.<br>Обозначим выполняемую мальчиками работу по покраске забора за 1. Пусть за $\frac{1}{v_1}, \frac{1}{v_2}, \frac{1}{v_3}$ часов Игорь, Паша и Володя, соответственно, покрасят забор, работая самостоятельно. Игорь и Паша красят забор за 9 часов: $\frac{1}{v_1+v_2}=9 \Leftrightarrow v_1+v_2=\frac{1}{9}$<br>Паша и Володя красят этот же забор за $12$ часов: $\frac{1}{v_3+v_2}=12 \Leftrightarrow v_3+v_2=\frac{1}{12}$,<br>а Володя и Игорь - за 18 часов: $\frac{1}{v_1+v_3}=18 \Leftrightarrow v_1+v_3=\frac{1}{18}$<br>Получаем систему уравнений:<br>$$\begin{cases} v_1+v_2=\frac{1}{9}, \\ v_3+v_2=\frac{1}{12}, \\ v_1+v_3=\frac{1}{18}. \end{cases}$$<br>Просуммируем левые и правые части данных трех уравнений, получим:<br>$$2(v_1+v_2+v_3)=\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9} \Leftrightarrow 2(v_1+v_2+v_3)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow v_1+v_2+v_3=\frac{1}{8} \Leftrightarrow$$<br>$$\Leftrightarrow \frac{1}{v_1+v_2+v_3}=8.$$<br>Ответ: 8.</td>
<td>Решение (самостоятельно).<br><br>Ответ:</td>
</tr>
<tr>
<td>10.7 Петя и Ваня выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 8 вопросов теста, а Ваня – на 9. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Вани на 20 минут. Сколько вопросов содержит тест?</td>
<td>10.8 Артем и Гриша выполняют одинаковый тест. Артем отвечает за час на 14 вопросов текста, а Гриша — на 28. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Артем закончил свой тест позже Гриши на 60 минут. Сколько вопросов содержит тест?</td>
</tr>
<tr>
<td>Решение.<br>Обозначим $N$ — число вопросов теста. Тогда время, необходимое Пете, равно $(N/8)$ часа, а время, необходимое Ване, равно $(N/9)$ часа. Петя закончил отвечать на тест через $1/3$ часа после Вани. Поэтому:<br>$$\frac{N}{8}-\frac{N}{9}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{N}{72}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow N=\frac{72}{3} \Leftrightarrow N=24.$$<br>Ответ: 24.</td>
<td>Решение (самостоятельно).<br><br>Ответ:</td>
</tr>
</table>

| | |
|---|---|
| **10.9** Влажность свежескошенной травы- 60%, сена-20% Сколько сена получится из 1 тонны свежескошенной травы? | **10.10** Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 36 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды? |
| **Решение.**<br>Найдем сначала содержание сухого вещества в 1 тонне свежескошенной травы. Если влажность - 60%, то на сухое вещество придется 40%, то есть 400кг.<br>В сене сухого вещества 100-20=80%, если эти 80% составляют 400 кг, то 100% массы сена будут равны 500кг.<br><br>Ответ: 500 кг. | **Решение (самостоятельно).**<br><br>Ответ: |
| **10.11** Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси? | **10.12** Смешав 55-процентный и 97-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 65-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 75-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 55-процентного раствора использовали для получения смеси? |
| **Решение.**<br>Пусть масса 30-процентного раствора кислоты – $m_1$ кг, а масса 60-процентного – $m_2$. Если смешать 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавить $10$ кг чистой воды, получится 36-процентный раствор кислоты: $0,3m_1+0,6m_2=0,36(m_1+m_2+10)$. Если бы вместо 10 кг воды добавили $10$ кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты: $0,3m_1+0,6m_2+0,5\cdot 10=0,41(m_1+m_2+10)$.<br>Решим полученную систему уравнений:<br>$\begin{cases}0,3m_1+0,6m_2=0,36m_1+0,36m_2+3,6,\\ 0,3m_1+0,6m_2+5=0,41m_1+0,41m_2+4,1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0,24m_2-0,06m_1=3,6,\\ 0,11m_1-0,19m_2=0,9\end{cases}\Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow\begin{cases}4m_2-m_1=60,\\ 11m_1-19m_2=90\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m_1=4m_2-60,\\ 11(4m_2-60)-19m_2=90\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m_1=4m_2-60,\\ 25m_2=750\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m_1=60,\\ m_2=30.\end{cases}$<br><br>Ответ: 60. | **Решение (самостоятельно).**<br><br>Ответ: |

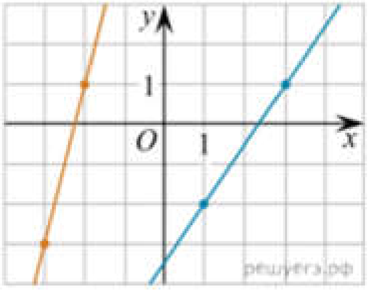
**ТРЕНАЖЁР ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ.**

**ТИП №11**

**11.1** На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.




**11.2** На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.




**Решение.**

Заметим, что уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$.

Найдём уравнение функции, отмеченной на рисунке оранжевым цветом. Заметим, что $k$ — тангенс угла наклона прямой, тогда $k = \frac{4}{1} = 4.$ По графику, $f(-2) = 1$, отсюда $4 \cdot (-2) + b = 1 \Leftrightarrow b = 9.$ Следовательно, уравнение прямой имеет вид $y = 4x + 9.$

Найдём уравнение функции, отмеченной на рисунке синим цветом. Заметим, что $k$ — тангенс угла наклона прямой, тогда $k = \frac{3}{2} = 1,5.$ По графику, $f(3) = 1$, отсюда $1,5 \cdot 3 + b = 1 \Leftrightarrow b = -3,5.$ Следовательно, уравнение прямой имеет вид $y = 1,5x - 3,5.$

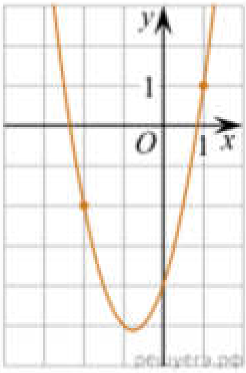
Теперь найдём абсциссу точки пересечения функций:

$4x + 9 = 1,5x - 3,5 \Leftrightarrow 2,5x = -12,5 \Leftrightarrow x = -5.$

Ответ: −5

**Решение (самостоятельно).**

**11.3** На рисунке изображён график функции $f(x) = 2x^2 + bx + c$. Найдите



$f(-5)$.

**Решение.** Из рисунка видно, что $f(-2) = -2, f(1) = 1$. Следовательно,

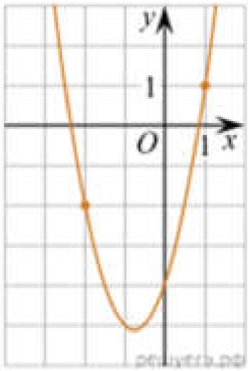
$$\begin{cases} 2\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c = -2, \\ 2\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b + c = -10, \\ b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b = 9, \\ 3c = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3, \\ c = -4. \end{cases}$$

Тогда, $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$, значит, $f(-5) = 2\cdot(-5)^2 + 3\cdot(-5) - 4 = 31$.

Ответ: 31.

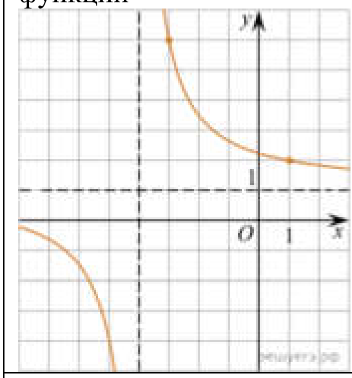
**11.4** На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 - 4x + c$. Найдите



$f(-3)$.

**Решение (самостоятельно).**

**11.5** На рисунке изображён график функции $f(x) = \dfrac{kx + a}{x + b}$. Найдите $k$.



**Решение.** Преобразуем данную функцию:

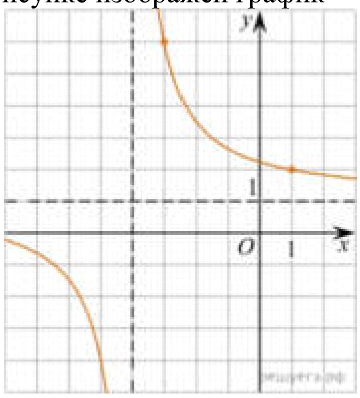
$$f(x) = \frac{kx + a}{x + b} = \frac{kx + kb + a - kb}{x + b} = \\ = \frac{kx + kb}{x + b} + \frac{a - kb}{x + b} = k + \frac{a - kb}{x + b}.$$

График функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$, значит, $k = 1$.

Ответ: 1.

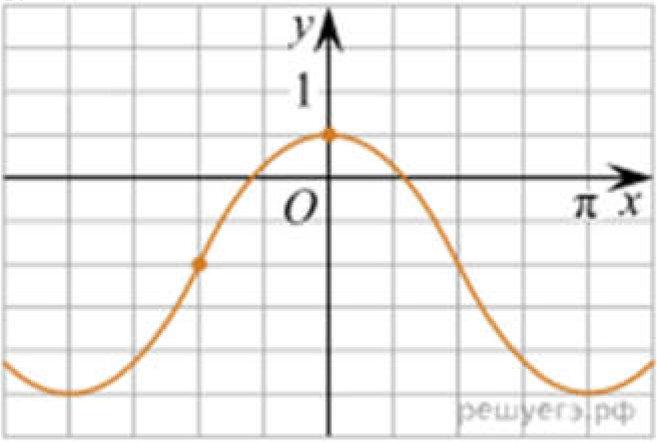
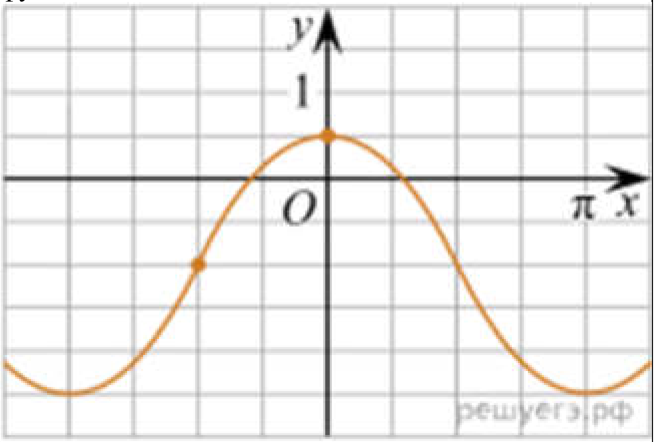
**11.6** На рисунке изображён график

функции



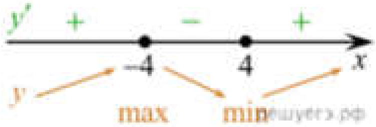
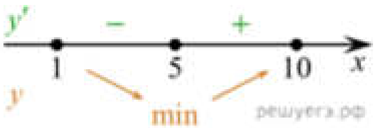
Найдите $a$.

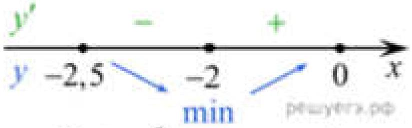
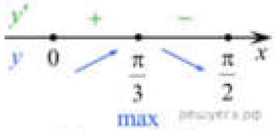
**Решение (самостоятельно).**

<table>
<tr>
<td>11.7 На рисунке изображён график функции $f(x)=a\cos x+b$. Найдите a.<br><br></td>
<td>11.8 На рисунке изображён график функции<br><br><br>Найдите b</td>
</tr>
<tr>
<td>Решение.<br><br>По графику, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1,$ тогда<br>$a\cos\frac{\pi}{2}+b=-1 \;\Leftrightarrow\; a\cdot 0+b=-1 \;\Leftrightarrow\; b$<br>Далее, по графику,<br>$f(0)=0{,}5,$<br>тогда<br>$a\cos 0-1=0{,}5 \;\Leftrightarrow\; a\cdot 1-1=0{,}5 \;\Leftrightarrow\; a=1{,}5.$<br><br>Ответ: 1,5.</td>
<td>Решение (самостоятельно).</td>
</tr>
</table>

**ТРЕНАЖЁР ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ.**

**ТИП №12**

| | |
|---|---|
| **12.1** Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 48x + 17.$ | **12.2** Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 3x^2 + 2.$ |
| **Решение.** Найдем производную заданной функции:<br>$y' = 3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x-4)(x+4)$<br>Найдем нули производной:<br>$3(x-4)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 4. \end{array}\right.$<br>Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:<br><br>Искомая точка максимума $x = -4.$<br>Ответ: −4. | **Решение (самостоятельно).** |
| **12.3** Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{x^2 + 25}{x}$ на отрезке $[1; 10]$. | **12.4** Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{x^2 + 25}{x}$ на отрезке $[-10;\ -1]$. |
| **Решение.** Найдем производную заданной функции:<br>$y' = \left(\dfrac{x^2+25}{x}\right)' = \left(x + \dfrac{25}{x}\right)' = 1 - \dfrac{25}{x^2} = \dfrac{x^2 - 25}{x^2}.$<br>Производная обращается в нуль в точках 5 и −5. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:<br><br>Наименьшим значением функции на заданном отрезке будет ее значение в точке 5. Найдем его:<br>$y(5) = \dfrac{25+25}{5} = 10.$<br>Ответ: 10. | **Решение (самостоятельно).** |

<table>
<tr>
<td>12.5 Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(x+3)^3$ на отрезке [−2,5; 0].</td>
<td>12.6 Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+5)^5 - 5x$ на отрезке [−4,5; 0].</td>
</tr>
<tr>
<td>Решение. Найдем производную заданной функции:<br>$$y'(x) = 3 - \frac{3}{x+3}.$$<br>Найдем нули производной на заданном отрезке:<br>$$\begin{cases} 3 - \frac{3}{x+3} = 0, \\ -2,5 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+3} = 1, \\ -2,5 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$<br>$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ -2,5 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$<br>Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:<br><br><br>В точке $x = -2$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:<br>$y(-2) = -2 \cdot 3 - \ln 1 = -6.$ Ответ: −6.</td>
<td>Решение (самостоятельно).</td>
</tr>
<tr>
<td>12.7 Найдите наибольшее значение функции $y = 12\cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.</td>
<td>12.8 Найдите наименьшее значение функции $y = 3 + \frac{5\pi}{4} - 5x - 5\sqrt{2}\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Решение. Найдем производную заданной функции:<br>$$y' = -12\sin x + 6\sqrt{3}.$$<br>Найдем нули производной на заданном отрезке:<br>$$\begin{cases} -12\sin x + 6\sqrt{3} = 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$<br><br><br>$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12\cos\frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12.$$<br>Ответ: 12.</td>
<td>Решение (самостоятельно).</td>
</tr>
</table>

# ТИП №13

<table>
<tr>
<td>

**13.1** а) Решите уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg}x.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

</td>
<td>

**13.2** а) Решите уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}\operatorname{tg}x.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

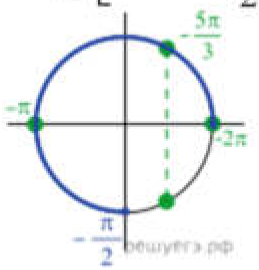
</td>
</tr>
<tr>
<td>

**Решение.**

а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}\Leftrightarrow\sin x\left(2-\frac{1}{\cos x}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$




б) Отберем корни на промежутке $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$ с помощью тригонометрической окружности. Получаем $x=-2\pi,\ x=-\frac{5\pi}{3}$ и $x=-\pi.$

Ответ:

а) $\left\{\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\ :\ k\in\mathbb{Z}\right\}$,

б) $-2\pi;\ -\frac{5\pi}{3},\ -\pi.$

</td>
<td>

**Решение (самостоятельно).**

</td>
</tr>
<tr>
<td>

**13.3** а) Решите уравнение $\log_5(2-x)=\log_{25}x^4.$

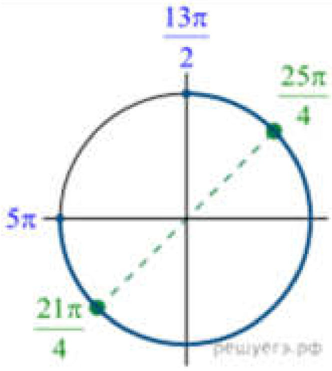
</td>
<td>

**13.4** а) Решите уравнение $\log_2\left(x^2-14x\right)=5.$

</td>
</tr>
</table>

| | |
|---|---|
| б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_9 \frac{1}{82};\ \log_9 8\right]$. | б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_3 0,1;\ 5\sqrt{10}\right]$. |
| **Решение.** а) Запишем исходное уравнение в виде: $\log_5(2-x)=\log_5 x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=x^2, \\ x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0, \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=1. \end{array}\right.$ б) Поскольку $\log_9 \frac{1}{82} < -2 < \log_9 8 < 1,$ отрезку $\left[\log_9 \frac{1}{82};\ \log_9 8\right]$ принадлежит единственный корень −2. Ответ: а) −2; 1, б) −2. | **Решение (самостоятельно).** |

| | |
|---|---|
| **13.5** а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}}-8\cdot 3^{x-1}+5=0.$ б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$. | **13.6** а) Решите уравнение: $4^x-2^{x+3}+15=0.$ б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $[2; \sqrt{10}]$. |
| **Решение.** а) Заметим, что $9^{\left(x-\frac{1}{2}\right)}=9^{\left(x-1+\frac{1}{2}\right)}=9^{\frac{1}{2}}\cdot 9^{(x-1)}=3\cdot 9^{(x-1)},$ преобразуем исходное уравнение: $9^{x-\frac{1}{2}}-8\cdot 3^{x-1}+5=0 \Leftrightarrow 3\cdot 9^{x-1}-8\cdot 3^{x-1}+5=0.$ Пусть $t=3^{x-1}$, тогда уравнение запишется в виде $3t^2-8t+5=0,$ откуда $t=1$ или $t=\frac{5}{3}.$ откуда $x=1. x=\log_3 5.$ б) Корень $x=1$ не принадлежит промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$. корень $x=\log_3 5$ принадлежит промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$. Ответ: а) $1, \log_3 5;$ б) $\log_3 5.$ | **Решение (самостоятельно).** |

| | |
|---|---|
| **13.7** а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.<br>б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi, \frac{13\pi}{2}\right]$. | **13.8** а) Решите уравнение $(49^{\cos x})^{\sin x} = 7^{\sqrt{2}\cos x}$.<br>б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$. |
| <br>**Решение.**<br>а) Преобразуем исходное уравнение:<br>$3^{\cos x} \cdot 5^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow 5^{\cos x} = 5^{\sin x} \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$<br>б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi, \frac{13\pi}{2}\right]$. Получим числа: $\frac{21\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}$.<br>Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{21\pi}{4}; \frac{25\pi}{4}$. | **Решение (самостоятельно).** |